Insegnare e apprendere la geometria

SILVIA SBARAGLI
NRD, Bologna; DFA, SUPSI, Locarno – Svizzera

IRENE C. MAMMARELLA
Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione, Università degli Studi di Padova

SOMMARIO

Il presente lavoro offre una revisione della letteratura sulla geometria da due punti di vista: la didattica della matematica e la psicologia dello sviluppo. Dopo alcuni cenni storici riguardanti l'insegnamento della geometria e i motivi che hanno condotto a un progressivo disinteressamento da parte della didattica, viene approfondito il rapporto tra realtà e concetti geometrici. Vengono, quindi, presentati alcuni studi classici sullo sviluppo del pensiero geometrico, seguiti da ricerche più recenti che considerano l'esistenza di concetti geometrici innati e il rapporto tra geometria e abilità visuospaziali.*

La geometria è la più antica tra le teorie create dall'uomo e ha rappresentato per due millenni uno dei campi del sapere tra i più importanti della matematica; anzi, per lungo tempo è stata assimilata alla matematica stessa (i matematici spesso chiamavano se stessi *geometri*).

Testimonianza significativa da questo punto di vista è la scritta riportata nel portico della famosa Accademia di Atene, dove Platone impartiva le sue lezioni, in cui compariva il seguente avvertimento: «Non entri chi non conosce la Geometria».

Una lunga tradizione iniziata nell'antichità come studio della «misura della terra» e rafforzata con gli *Elementi* di Euclide, ci tramanda una geo-metria (appunto) fortemente radicata nell'esperienza. In effetti, il rapporto tra geometria e mondo fisico è molto stretto e rappresenta uno degli aspetti salienti che la caratterizzano nonché, come vedremo

* Questo articolo rappresenta una sintesi del capitolo *L'apprendimento della geometria* di S. Sbaragli e I.C. Mammarella, pubblicato in D. Lucangeli e I.C. Mammarella (2010), *Psicologia della cognizione numerica: Approcci teorici, valutazione e intervento,* Milano, FrancoAngeli.

nei prossimi paragrafi, un momento fondamentale dell'apprendimento di tale disciplina: «Il difetto dello spirito matematico […] è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico» (Enriques, 1906). Secondo tale autore *la geometria è la prima rappresentazione del mondo fisico.*

In questa ottica Giuseppe Peano (1894, p. 141) afferma: «Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche».

Proprio la possibilità di un'evidenza empirica delle proprietà espresse dalla geometria è stata per secoli alla base della fiducia nella verità assoluta della geometria stessa. Tale certezza si è attenuata con la scoperta delle geometrie «non Euclidee» e soprattutto con l'acceso dibattito che ha caratterizzato la storia della matematica a partire dalla *crisi dei fondamenti,* a cavallo tra il XIX e il XX secolo. In questo senso, Henri Poincaré distingue tra lo *spazio fisico* nel quale avvengono le nostre esperienze e quello *geometrico* astratto e ideale: «I principi della geometria non sono dei fatti sperimentali. […] È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria è una scienza sperimentale, anche solo in parte» (Poincaré, 1902, p. 90-92).

Ancora più incisiva è la scelta di David Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie*, che segnano un vero e proprio momento di svolta, tagliando di fatto il legame tra la geometria e la realtà. La geometria diventa così una disciplina sempre più affrancata da ogni riferimento al reale: il criterio essenziale di validità diviene la correttezza formale del ragionamento e la coerenza di un sistema formale. Un sistema di assiomi dovrà essere coerente, ovvero non contraddittorio, e questa è la sola condizione logica richiesta per l'esistenza degli oggetti matematici definiti da esso. La crisi dei fondamenti portò quindi con sé il principio secondo il quale *la matematica è un'opinione*.

La geometria dal punto di vista didattico

È oggi quasi universalmente riconosciuto che l'aspetto teorico abbia la priorità rispetto a un'analisi sperimentale, ma, se consideriamo la geometria dal punto di vista didattico collegato al processo di insegnamento-apprendimento, il rapporto tra intuizioni connesse all'esperienza e ragionamento geometrico resta fondamentale.

Condividiamo in effetti con Speranza (1987) la convinzione che un'epistemologia — per essere utile alla didattica ed essere effettivamente vicina all'effettiva costruzione del pensiero matematico — deve essere genetica e quindi anche sperimentale.

L'evoluzione del pensiero geometrico va quindi ricercata a partire dalle prime esperienze spaziali del bambino fino alle più ardite e moderne teorie.

Nei primi livelli scolastici questa disciplina è rivolta a organizzare l'esperienza visiva, tattile e motoria degli allievi, puntando l'attenzione su alcune caratteristiche spaziali degli oggetti e organizzandosi in seguito razionalmente in modo sempre più autonomo. In altre parole, inizialmente la geometria ha a che fare con sensazioni, esperienze e osservazioni esterne di tipo senso-motorio e procede poi per razionalizzazioni successive di queste prime osservazioni.

In questa evoluzione acquista un ruolo fondamentale il linguaggio naturale, che fornisce esso stesso degli orientamenti per organizzare l'osservazione e per interpretare il mondo. I bambini di scuola dell'infanzia e dei primi anni di scuola primaria tendono quindi a formarsi i concetti geometrici da un lato organizzando la *percezione*, dall'altro utilizzando il *linguaggio*.

In seguito, negli ultimi anni di scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado, dovrebbe iniziare una sistemazione e razionalizzazione del sapere geometrico che continuerà in modo sempre più critico e profondo nella scuola secondaria di secondo grado e che dovrà tener conto del fatto che il valore formativo di tale disciplina viene messo in risalto da una trattazione che inglobi i diversi approcci possibili.

L'organizzazione geometrica va quindi didatticamente costruita attivamente da parte dell'allievo, piuttosto che data come prodotto già sistemato.

È stata proprio la mancanza di tale sensibilità didattica che ha portato storicamente a un abbandono della geometria dall'insegnamento della scuola primaria. Nel 1867 alcuni illustri matematici italiani sancirono ufficialmente che l'unico modello epistemologicamente adeguato per questa disciplina era quello euclideo e, riconoscendo improponibile una rigorosa sequenza di tale impostazione nella scuola primaria, la abolirono. Se ancora oggi la geometria risente di un'accentuata marginalità (rispetto al curricolo di matematica) e di un eccessivo formalismo, riteniamo che ciò sia conseguenza, almeno in parte, di una visione epistemologica così radicale.

Eppure gli *elementi primi* dello scienziato non devono essere necessariamente gli elementi primi dell'allievo. Come sostengono D'Amore e Fandiño Pinilla (2009), «è grazie a una relazione tra riflessioni epistemologiche e didattiche sulla matematica che si arriva al dibattito sugli *elementi primi*, per capire come non ci sia coincidenza tra elementi primi per uno studente alle prime armi e termini primitivi in matematica. Senza questa possibilità di riflessione critica, l'insegnante sarebbe portato a pensare che vi sia coincidenza».

La tendenza a voler riprodurre l'impostazione euclidea nell'insegnamento della scuola di base continua ancora oggi; molti insegnanti introducono questa disciplina iniziando da concetti come il punto, la retta e il piano, importanti per una trattazione razionale, ma distanti dall'esperienza dell'allievo o da definizioni che andrebbero invece considerate come punto di arrivo di un percorso di apprendimento costruttivo e personale dello studente. Inoltre, tale scelta comporta l'iniziale trattazione esclusiva della geometria piana, seguita solo dopo diversi anni da quella dello spazio, ma dal punto di vista didattico diverse sperimentazioni hanno messo in evidenza che la geometria tridimensionale (3D) rappresenta una lettura della realtà più intuitiva per il bambino essendo più vicina alle sue esperienze (Arrigo e Sbaragli, 2004). È sicuramente vero che la geometria dello spazio presenta, da un punto di vista adulto, maggiori difficoltà di sistemazione razionale rispetto alla geometria del piano; lo conferma il seguente passaggio di Fandiño Pinilla (2002, p. 68): «Platone [Rep. VII, 528] scriveva che, mentre la geometria bidimensionale è una scienza, quella tridimensionale (ai suoi tempi) ancora non lo è, dato che, diremmo noi oggi, non ne ha ancora lo «statuto»»; tuttavia, per l'apprendimento, la figura piana è certamente più sofisticata della solida, dato che tutto ciò che circonda il bambino è 3D.

Siamo consapevoli che ciascun oggetto o rappresentazione mostrata per far intuire un concetto matematico non può che esserne solo un modello e in quanto tale non potrà mai possedere le caratteristiche di idealità, perfezione, astrazione, generalità tipiche di un oggetto matematico, ma riteniamo che i modelli 3D risultino più vicini all'intuizione degli allievi, dato che per questi, a differenza di quanto avviene per quelli 2D, non devono far finta che non abbiano una dimensione. La nostra proposta didattica consiste nell'iniziare nella scuola dell'infanzia e primaria da figure 3D per poi giungere a quelle 2D e in seguito operare continui passaggi dal 3D al 2D e viceversa (Cottino e Sbaragli, 2004).

Dal punto di vista didattico ricordiamo inoltre il famoso testo di geometria del progetto MaSe (progetto matematica scuola elementare) di D'Amore (1987), che ha cambiato la storia dell'insegnamento della geometria nelle scuole primarie italiane; si tratta di un prezioso volume per insegnanti, oramai difficile da trovare e perciò sostituito nel nuovo progetto *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere* dal testo Cottino e colleghi (2011).

Realtà e matematica

Partire dall'esperienza reale fornisce informazioni spaziali legate alla forma, alla grandezza, alla posizione degli oggetti; caratteristiche che risultano importanti per un primo approccio all'apprendimento in campo geometrico ma che vanno didatticamente controllate per far emergere gradatamente aspetti sempre più concettuali.

Occorre cioè creare attività pensate allo scopo di armonizzare l'idealità (astrattezza) delle figure geometriche e il loro rapporto con gli oggetti della realtà empirica. Tramite la geometria diamo un'interpretazione delle rappresentazioni spaziali e delle relazioni tra i vari enti considerati, ma nella visione geometrica non ci si preoccupa se il disegno considerato è effettivamente un triangolo rettangolo come richiesto dal problema o come abbiamo fatto a misurarlo e a saperlo; ciò che importa è come è fatto l'ente e quali sono le conseguenze che se ne possono dedurre. In geometria la realtà viene quindi completamente sostituita da rappresentazioni mentali.

Un quadrato, in termini geometrici, non è l'immagine di un oggetto reale — anche se può essere legato a qualche oggetto reale, ad esempio a un opportuno foglio di carta — ma condivide con esso quelle proprietà che sono determinate dalla sua definizione; lo dice bene Efraim Fischbein (1993):

> I punti (oggetti zero-dimensionali), le linee (oggetti uni-dimensionali), i piani (oggetti bi-dimensionali) non esistono, non possono esistere nella realtà. [...] Questi sono costrutti mentali puri e semplici che si suppone non possiedano alcuna realtà sostanziale. [...] Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate dalle definizioni (sebbene possano essere ispirate da un oggetto reale). Un quadrato è un rettangolo avente i lati uguali. Partendo da queste proprietà si può andare avanti per scoprire le altre proprietà del quadrato.

Il richiamo agli aspetti pratici delle scienze sperimentali, pur essendo *necessario* nei primi livelli scolastici, può portare in errore in ambito geometrico e lasciare in ombra il fatto che questa disciplina riguarda verità eterne e universali. Occorre una grande sensibilità didattica per favorire il necessario connubio tra realtà e matematica; l'uso di modelli concreti può fornire un supporto efficace alle intuizioni matematiche, ma in certi casi può addirittura trasformarsi in ostacolo per la costruzione del sapere (Maier, 1993; 1998). Sostengono D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2008, p. 117):

> Occorre riflettere bene sul senso profondo della differenza che c'è tra scienze empiriche e matematica; va bene usare modelli concreti degli oggetti matematici, ovviamente, non se ne può fare a meno, ai primi livelli di scolarità; ma demandare a questi modelli la concettualizzazione è certamente il primo passo verso difficoltà nelle quali costringiamo gli allievi. Perché far loro credere che l'oggetto concreto sia il concetto?, che il modello empirico sia l'oggetto matematico? Perché non dirlo esplicitamente che c'è una differenza abissale? Perché non problematizzare la questione? In nome di una semplificazione e di una sicurezza che si vuol dare allo studente, in realtà, lo si obbliga a navigare a vista in un mare irto di scogli pronti a far arenare la nave della costruzione concettuale.

Geometria e ragionamento spaziale risultano essere quindi due ambiti di riflessione tendenzialmente distinti: il ragionamento spaziale, e più in generale le abilità spaziali, si riferiscono a gran parte del nostro adattamento alla realtà del mondo fisico nel quale viviamo; invece, come abbiamo ribadito più volte, non avviene altrettanto per la geometria. Nella teoria evolutiva elaborata dai coniugi van Hiele (1986) e che verrà in seguito descritta nel dettaglio, viene proprio distinta la geometria come concettualizzazione dello spazio dalla geometria come teoria formale. L'ultimo livello dello sviluppo consisterà nella capacità di muoversi all'interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all'interno di una data assiomatica.

Va però ricordato che i due aspetti, figurale e concettuale, possono trovare un buon legame nella *teoria dei concetti figurali* elaborata da Fischbein (1993). In psicologia, concetti e immagini sono considerati due categorie distinte di entità mentali: i concetti sono rappresentazioni ideali di una classe di oggetti o di un fenomeno, mentre le immagini sono rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Nei ragionamenti geometrici, però, queste due entità non sono così indipendenti: in una dimostrazione, ad esempio, si operano alcuni passaggi, come se gli oggetti fossero reali, pur usando informazioni di natura concettuale. A questo proposito Fischbein (1993) afferma: «Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente, proprietà concettuali e figurali».

Quando operiamo con enti geometrici, consideriamo le loro caratteristiche ideali, ma senza distinguerle dall'immagine concreta cui ci riferiamo. Si può concludere, quindi, che l'oggetto del ragionamento in geometria non è né un puro concetto, né una pura immagine, ma un *concetto figurale:* «Entità mentali che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali — come l'idealità, l'astrattezza, la generalità, la perfezione» (Fischbein, 1993). I concetti figurali includono quindi la figura come proprietà intrinseca, intesa come immagine interamente controllata dalla definizione.

Lo sviluppo del pensiero geometrico

Abbiamo fino ad ora presentato quanto emerso dalla letteratura relativa alla didattica della matematica; se ci spostiamo invece nell'ambito della ricerca psicologica è innegabile che l'interesse nei confronti della geometria non si sia sviluppato come avrebbe meritato.

Piaget e Inhelder (1979) furono tra i primi a interessarsi di geometria e in particolare dello sviluppo del pensiero geometrico nel bambino. Nel libro *La rappresentazione dello spazio nel bambino*, i due autori distinguevano tra *spazio percettivo* — percepito dal bambino attraverso l'attività senso-motoria — e *spazio rappresentativo* — riferito allo spazio che il bambino può rappresentarsi a livello intellettuale con la comparsa del linguaggio.

Piaget individuava tre grandi classi di rapporti spaziali:

1. i rapporti *topologici*, che riguardano ad esempio la vicinanza, la separazione, l'ordine e i diversi tipi di connessione fra i vari punti dello spazio, considerati indipendentemente da ogni operazione di carattere metrico;

2. i rapporti *proiettivi*, cioè quei rapporti spaziali che sono in stretta relazione con il punto di vista da cui si osservano gli oggetti e variano con il variare di questo;
3. i rapporti *euclidei*, che non sono indipendenti dalle operazioni di misura come quelli topologici, né hanno carattere soggettivo come quelli proiettivi, ma sono invece, nel contempo, oggettivi e definibili mediante ricorso all'unità di misura.

Secondo Piaget i bambini di 4 anni giungono già a dare una corretta rappresentazione di tutti i rapporti topologici, mentre per una corretta rappresentazione dei rapporti spaziali euclidei e proiettivi bisogna aspettare fino a dopo gli 8-9 anni, quando cioè i bambini hanno raggiunto un tipo di pensiero operatorio e reversibile. Secondo queste ricerche, anche le difficoltà legate a false relazioni tra perimetro e area sembrano perdurare fino ai 12 anni e sono assai poco connesse con lo sviluppo linguistico del soggetto.

Tali considerazioni hanno condizionato per alcuni decenni le successive analisi sul tema. Tuttavia, le ipotesi di Piaget sono state spesso smentite da ricerche successive e sottoposte a diverse critiche da parte degli studiosi successivi (si veda ad esempio Resnick e Ford, 1981, cap. 7).

Una teoria alternativa a quella piagetiana riguardante lo sviluppo del pensiero geometrico è stata proposta da Pierre e Dina van Hiele (van Hiele, 1986; Crowley, 1987), i quali hanno tentato di delineare i livelli di sviluppo del pensiero geometrico.

1. A un primo livello, denominato *visivo*, i bambini riconoscono le forme presentate loro a livello percettivo, ma non possono rappresentarle mentalmente, ovvero non sono in grado di creare delle immagini mentali delle forme geometriche. A questo livello, una figura è un rettangolo «perché è simile a una porta»; non vi è, però, una comprensione delle proprietà delle figure.
2. Al secondo livello, denominato *descrittivo-analitico,* i bambini iniziano a riconoscere le figure in base alle loro proprietà. Le immagini perdono di importanza rispetto ai loro attributi, ma le proprietà non sono ancora ordinate e i bambini non sono ancora capaci di differenziarle in termini di definizioni e proposizioni, né sono ancora in grado di spiegare le relazioni tra le varie figure geometriche. Ad esempio un quadrato non è ancora riconosciuto come un particolare rettangolo.
3. Il terzo livello è denominato delle *deduzioni informali* o della *geometria euclidea*. Il bambino comincia a osservare le varie relazioni tra le figure dal punto di vista logico, ad esempio il quadrato è un caso particolare di rettangolo poiché soddisfa tutte le proprietà del rettangolo. Questo presuppone la conoscenza di una terminologia specifica appropriata e delle definizioni, così da poter riconoscere classi di figure e dedurne alcune proprietà. A questo livello, tuttavia, non vi è ancora una comprensione degli assiomi e delle dimostrazioni.
4. Al quarto livello, *deduttivo* o della *logica formale*, i ragazzi cominciano a essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa, e possono capire le dimostrazioni, i postulati, gli assiomi e i teoremi. Il pensiero si

occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente.

5. L'ultimo livello, del *rigore geometrico,* consente agli studenti di apprendere la geometria non euclidea e di confrontare diversi sistemi di assiomi. La geometria viene pertanto rappresentata in modo astratto. I van Hiele non forniscono esempi o illustrazioni di questo livello che comunque considerano scolasticamente assai più raro ed eventualmente presente a livelli più alti di istruzione.

Sulla base di alcuni studi in ambito educativo, Clements e Battista (1992) hanno inserito un livello precedente a quello visivo, un livello zero, denominato di *pre-riconoscimento*, nel quale i bambini percepiscono le forme in modo corretto ma non sono in grado di classificarle o di riprodurle attraverso il disegno.

Oltre a descrivere vari livelli di sviluppo del pensiero geometrico, i van Hiele hanno individuato alcune proprietà del modello, che possono risultare particolarmente utili agli insegnanti e a coloro che si occupano della formazione e della didattica della geometria.

a) Secondo la proprietà *sequenziale* il passaggio da un livello al successivo avviene nell'ordine proposto dal modello. Per passare al livello successivo è indispensabile che lo studente abbia acquisito le strategie del livello precedente.
b) La seconda proprietà, denominata del *passaggio tra i livelli*, ipotizza che i progressi da un livello al successivo dipendano non tanto dall'età ma dall'*educazione* fornita al bambino. La completa assenza di un'istruzione formale non consentirebbe alcuno sviluppo, pertanto i metodi di insegnamento sono fondamentali: mentre alcuni favoriscono il passaggio a un livello successivo, altri lo impediscono. La maturazione che conduce a un livello superiore sembra essere un processo essenzialmente legato all'apprendimento e all'istruzione e non di ordine biologico. È possibile dunque favorire e accelerare tale processo. Così come un bambino non impara le regole grammaticali attraverso un insegnamento esplicito, ma le deduce dall'uso corrente applicandole per imitazione e per tentativi ed errori, così impara la matematica e, in particolare, la geometria agendo su di esse in modo attivo.
c) La proprietà *intrinseca ed estrinseca* prevede che l'oggetto di interesse di un dato livello diventi oggetto di studio del livello successivo. Ad esempio nel primo livello il bambino impara a denominare le figure in base a caratteristiche percettive. Ogni figura possiede delle proprietà, ma queste possono essere scoperte, comprese e analizzate, solo al secondo livello.
d) La proprietà *linguistica* postula che ogni livello sia caratterizzato da un linguaggio specifico che può essere considerato corretto all'interno di quel particolare livello, ma può essere ulteriormente ampliato a un livello successivo. Ad esempio una figura può avere più di un nome: un quadrato è un rettangolo, ma è anche

un parallelogramma e un quadrilatero. Tali distinzioni non sono utilizzabili al secondo livello, ma diventano fondamentali dal terzo livello in avanti.

e) Secondo la proprietà della *discrepanza*, infine, il tipo di educazione fornita deve essere coerente con il livello dello studente; se viene fornita un'istruzione che si colloca a un livello più alto, lo studente incontrerà difficoltà nel seguire i processi di pensiero formulati dall'insegnante.

Come sostenevano gli stessi van Hiele, infatti, due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Ciò accade spesso tra insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a capire il percorso mentale dell'altro e il loro dialogo continua unicamente perché lo studente tenta di intuire il pensiero dell'insegnante e ad esso si uniforma. I ragazzi non riescono a maturare un vero e proprio apprendimento se imparano, per abitudine, a manipolare relazioni matematiche che non conoscono e delle quali non hanno mai visto la nascita. Essi finiscono così per disporre senza consapevolezza e padronanza, ma solo per imitazione, della stessa unica rete di conoscenze dell'insegnante, identica per tutti, nella quale le relazioni sono di tipo logico e deduttivo. È difficile per lo studente conservare nella memoria a lungo termine e soprattutto padroneggiare con competenza una rete di relazioni così costruita, non fondata su esperienze sensoriali personali. Nel migliore dei casi egli non conoscerà altro, oltre a ciò che gli è stato insegnato. Ciò è fortemente legato a costrutti rientranti nella ricerca in didattica della matematica come l'idea di *contratto didattico* (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli, 2008). Inoltre, in questa trattazione rientra anche la problematica dell'uso del linguaggio da parte dell'insegnante. Come sostengono D'Amore e Fandiño Pinilla (2009),

> se la convinzione (debole) dell'insegnante è che il linguaggio che si usa in matematica sia univocamente ed eternamente determinato a priori dalla comunità scientifica, non potrà che pretendere dall'allievo un cieco uso di esso, senza vie personali; il che porta spesso a una sorta di tentativo di imitazione acritica da parte dello studente, una sorta di vuota e sterile malacopia del linguaggio che costituisce per la classe un miraggio inarrivabile; in D'Amore (1993) abbiamo chiamato «matematichese» questa lingua d'aula, dando varie prove della sua esistenza e dei suoi caratteri negativi.

I principi geometrici innati

Le ricerche degli ultimi vent'anni dimostrano che i neonati possiedono delle competenze fisiche e matematiche: sono capaci di stimare numerosità (Wynn, 1992), di identificare gli oggetti (Xu e Carey, 1996; Needham, 2001; Wilcox e Schweinle, 2002) e di codificare la posizione degli oggetti (Newcombe, Huttenlocher e Learmonth, 1999).

Alcune ricerche hanno dimostrato, inoltre, la presenza di competenze geometriche nei neonati e nei bambini molto piccoli. Káldi e Leslie (2002) hanno osservato che a 6,5 mesi i bambini sono capaci di identificare le figure di quadrato e cerchio e di ricordarne la posizione nello spazio. Ma già a partire dai 2-3 mesi, sembra che si sviluppi la capacità di distinguere figure geometriche della stessa forma ma con diverso orientamento (si veda Slater et al., 1990). Kavšek (1999) ha documentato che dagli 8 mesi i bambini sono in grado di distinguere una figura tridimensionale come un cilindro da una bidimensionale. Altre ricerche, infine, mostrano che i bambini sono in grado di rappresentarsi e utilizzare *cue* geometrici. In tali studi, solitamente, il bambino è posto all'interno di uno spazio tridimensionale di una data forma e, dopo un periodo di familiarizzazione in cui viene mostrato un target interessante (ad esempio un gioco) in un angolo dell'ambiente, al bambino viene mostrato l'ambiente con il gioco posizionato in un angolo diverso. Se il bambino guarda più a lungo tale scena, se ne deduce che egli sia capace di usare alcune informazioni geometriche come la posizione, la distanza, ecc. (Hermer e Spelke, 1996; Learmonth, Newcombe e Huttenlocher, 2001; Lourenco e Huttenlocher, 2008).

Recentemente Dehaene, Izard, Pica e Spelke (2006) si sono domandati se alcuni principi geometrici siano intrinseci al pensiero umano, ovvero se sia possibile individuare dei principi geometrici innati. Per rispondere a questa domanda hanno testato bambini e adulti di una tribù amazzonica, chiamata Mundurukù, confrontandoli con bambini e adulti nati e vissuti negli Stati Uniti d'America. Il gruppo di bambini e adulti appartenenti alla tribù amazzonica aveva sempre vissuto all'interno di un villaggio isolato ubicato presso il fiume Cururu in Amazzonia, e non aveva ricevuto alcun tipo di educazione formale. C'è da aggiungere che il linguaggio matematico dei Mundurukù è molto povero: possiedono le parole-numero uno, due, tre, quattro, cinque (letteralmente una mano), dieci (due mani) e quindici (tre mani) e, per quanto riguarda la geometria, possiedono parole specifiche per i concetti di linea, punto, lato e figura curva. Gli autori della ricerca, per testare la presenza di concetti geometrici innati, hanno creato una prova in cui, per ogni concetto (ad esempio rapporti topologici, figure geometriche, figure simmetriche), venivano mostrate 6 figure, e il compito del partecipante consisteva nell'individuare l'intruso, ovvero la figura che non aveva niente in comune con le altre cinque. In questo modo veniva ridotto al minimo non solo l'uso del linguaggio, ma anche la possibilità di fornire dei suggerimenti (alcuni esempi di stimoli sono rappresentati in figura 1).

I risultati degli autori apparivano coerenti con l'ipotesi di partenza, ovvero con l'esistenza di principi geometrici innati. Gli indigeni Mundurukù erano in grado di rispondere agli item appartenenti alle seguenti categorie di concetti geometrici: rapporti topologici (ad esempio chiuso, aperto, dentro e fuori), geometria euclidea (ad esempio linea, punto, perpendicolarità, angolo retto) e figure geometriche (ad esempio quadrato, triangolo, cerchio).

Al contrario, gli indigeni dell'Amazzonia non erano capaci di rispondere correttamente agli stimoli della categoria trasformazioni geometriche, nei quali erano

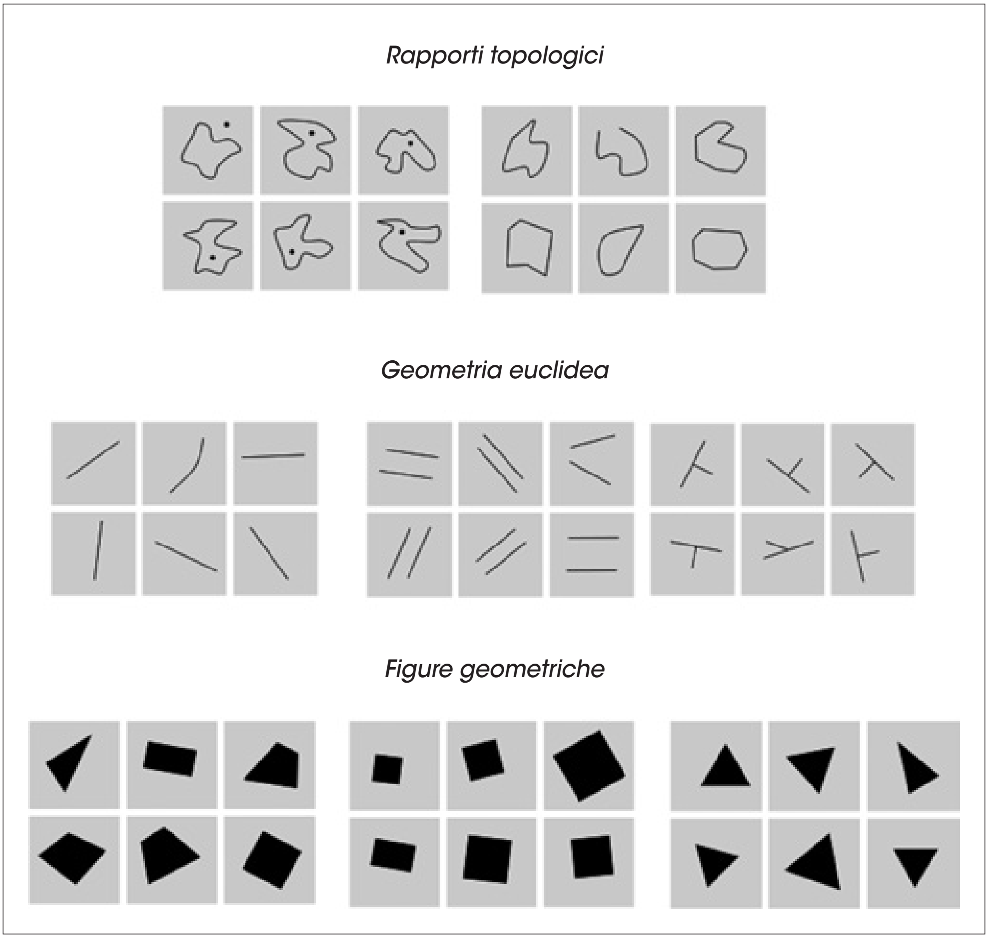

Fig. 1 Esempi di stimoli utilizzati nella ricerca di Dehaene et al. (2006).

raffigurate traslazioni, simmetrie e rotazioni. Tale risultato è stato interpretato dagli autori come controprova del fatto che non tutti i principi geometrici sono innati. Un altro risultato interessante riguardava la differenza tra adulti Mundurukù (con prestazioni peggiori) e americani (con prestazioni migliori) e, al contempo, la mancata differenza tra bambini Mundurukù e americani. In altre parole, i bambini americani scolarizzati mostravano esattamente le stesse prestazioni degli indigeni dell'Amazzonia della stessa età. Tale dato dimostra che le enormi differenze culturali e educative non vanno a incidere su quelli che possono essere definiti i concetti geometrici a base innata, menzionati in precedenza, che sono presenti, quindi, indipendentemente dalla cultura e dall'educazione.

Esiste una relazione tra geometria e abilità visuospaziali?

In ambito psicologico il problema di fornire una definizione di abilità visuospaziali non è nuovo e riflette il numero elevato di approcci che vi si sono interessati. Il termine *spaziale* è spesso legato alla capacità di muoversi nello spazio e per questo motivo alcuni studiosi fanno coincidere le abilità spaziali con la capacità di orientamento. Tale approccio permette di distinguere, ad esempio, tra *rappresentazione egocentrica* e *allocentrica dello spazio* (Carlson-Radvansky e Irwin, 1994), dove la prima indica una codifica delle informazioni spaziali basata sulla posizione del proprio corpo, mentre la seconda fa riferimento alla capacità di stabilire la posizione di un oggetto in base alla posizione di uno o più oggetti nello spazio, indipendentemente dal proprio punto di vista. Una distinzione simile riguarda la differenza tra una rappresentazione di tipo *route*, basata sul punto di vista della persona che si muove nello spazio, o *survey*, che consente una visione dall'alto dell'ambiente, per questo anche chiamata «a volo d'uccello» (Tversky, 1991). Le ricerche neurofisiologiche mostrano, inoltre, che il sistema visivo dei primati e degli esseri umani è composto da due vie di trasmissione delle informazioni: la via dorsale o *where system* (Ungerleider e Mishkin, 1982) — che consente di elaborare movimenti e informazioni spaziali, permettendo di rispondere alla domanda «Dove si trova un oggetto» — e la via ventrale o *what system,* che appare importante nel riconoscere la forma degli oggetti e le loro caratteristiche percettive, permettendo quindi di rispondere alla domanda «Di che oggetto/forma si tratta?» (Van Essen, Anderson e Felleman, 1992; Smith e Jonides, 1999). Definire le abilità visuospaziali riferendosi esclusivamente all'orientamento spaziale o alla capacità di stimare la posizione di un oggetto nello spazio appare, quindi, riduttivo.

Alcuni studiosi hanno tentato di classificare le abilità visuospaziali, ma l'unico dato certo che emerge è che l'abilità spaziale non è un concetto unitario, ma può essere distinta in diversi fattori. A questo proposito, McGee (1979) distingue ad esempio la *visualizzazione,* ovvero la capacità di manipolare e ruotare gli oggetti, e l'*orientamento,* ovvero la capacità di mantenere l'orientamento spaziale rispetto al proprio corpo.

Linn e Peterson (1985) invece propongono una divisione in tre fattori:

1. *percezione spaziale,* intesa come abilità di determinare dei rapporti spaziali in funzione dell'orientamento del proprio corpo;
2. *rotazione mentale,* ovvero la capacità di ruotare oggetti bi- e tri-dimensionali in modo rapido e accurato;
3. *visualizzazione spaziale,* che consente di manipolare delle informazioni spaziali presentate in modo non convenzionale.

Sia la rotazione mentale che la visualizzazione spaziale presuppongono l'utilizzo di *immagini mentali*, che secondo Kosslyn (1980; 1994) non coincidono con una semplice esperienza fenomenica, ma piuttosto fanno riferimento a una forma di rappresentazione interna che consente di manipolare l'aspetto visivo e/o spaziale di un oggetto fisico.

A tal proposito, Cornoldi, De Beni, Giusberti e Massironi (1998) e Cornoldi, De Beni e Mammarella (2008) hanno distinto fra *traccia visiva* e *immagine generata*, dove la prima ha origine direttamente dalla percezione visiva di un oggetto (ad esempio, vedo un ombrello rosso) e ne conserva alcune proprietà, mentre la seconda deriva da un'informazione conservata nella memoria a lungo termine sotto forma di immagine (ad esempio, quando si cerca di ricordare l'immagine della Torre Eiffel di Parigi). Una differenza tra le due forme di immagini risiede nel controllo attentivo necessario per mantenerle vivide e attive nella nostra memoria: mentre la traccia visiva necessita di uno scarso controllo attentivo per restare attiva nella nostra mente, l'immagine generata ha bisogno di un alto grado di controllo attentivo.

Kosslyn (1980; 1994) ipotizza che sia le tracce visive che le immagini generate vengano mantenute attive all'interno di un sistema di memoria a breve termine che lui denomina *visual buffer*. Tale sistema consente di esplorare le proprietà visive dell'immagine, di analizzarne la posizione nello spazio, di trasformare, ruotare e di aggiungere ulteriori proprietà derivate da informazioni già possedute in memoria a lungo termine. La memoria di lavoro visuospaziale (MLVS) condivide molte caratteristiche con il *visual buffer* descritto da Kosslyn, nonostante i due paradigmi sperimentali abbiano, poi, seguito direzioni diverse.

La MLVS può essere definita come un sistema che consente di manipolare e mantenere per un breve periodo di tempo informazioni visive e spaziali (Baddeley, 1986). La distinzione tra una componente visiva e una spaziale entro la MLVS è ben documentata in letteratura. Ad esempio, Logie (1995) ha proposto l'esistenza di due sottocomponenti della MLVS: il *visual cache*, un magazzino temporaneo per le informazioni visive come forme, colori, tessiture e orientamento di oggetti, e l'*inner scribe*, un sistema spaziale legato al mantenimento temporaneo di movimenti e sequenze di movimenti in grado di rinfrescare le tracce provenienti dal visual cache. Il significato attribuito da Logie (1995; Baddeley e Logie, 1999) al termine *spaziale* faceva riferimento non solo a posizioni nello spazio fisico ma anche a rappresentazioni motorie ed era impiegato per ridurre l'ambiguità insita nel termine stesso. Infatti, le rappresentazioni spaziali nella memoria di lavoro permettono di pianificare azioni mentali che possono essere eseguite immediatamente o codificate per un utilizzo successivo. Quindi il termine *spaziale* può riferirsi a movimenti sia fisici, ovvero rappresentazioni di movimenti in corso o compiute dal soggetto, sia mentali, intesi come pianificazione o simulazione di azioni su delle immagini mentali. Cornoldi e Vecchi (2003; si veda anche Pazzaglia e Cornoldi, 1999; Mammarella, 2008; Mammarella, Pazzaglia e Cornoldi, 2008) propongono invece una distinzione in tre componenti, all'interno della MLVS. Nello specifico, distinguono tra *memoria visiva, memoria spaziale-sequenziale* e *spaziale-simultanea*. La memoria visiva consente di mantenere ed elaborare informazioni quali la forma di un oggetto, la tessitura e il colore, la memoria spaziale-sequenziale consente di mantenere il ricordo di posizioni presentate in successione temporale, mentre quella spaziale-simultanea di ricordare posizioni presentate contemporaneamente. Quindi, se nei compiti sequenziali l'ordine riveste un ruolo cruciale, in quelli simultanei è la configurazione globale degli stimoli a essere rilevante.

A livello intuitivo il legame tra abilità visuospaziali, immagini mentali, MLVS e geometria è abbastanza scontato: per risolvere un problema di geometria, ad esempio, è spesso necessario rappresentarsi correttamente la figura di cui si sta parlando e compiere su di essa delle trasformazioni per giungere al risultato corretto. Il riconoscimento di figure geometriche implica non solo aspetti percettivi, ma anche la capacità di recuperare dalla memoria informazioni sulle proprietà di quella data figura. Anche la riproduzione di una figura geometrica, ad esempio attraverso il disegno, richiede di generare un'immagine mentale della figura, di mantenerla attiva per un certo periodo di tempo e di confrontare la propria produzione grafica con l'immagine mentale generata. Altri compiti di geometria richiedono, poi, di eseguire trasformazioni di vario tipo.

Fino ai 6 anni i bambini sembrano capaci di svolgere le prime due operazioni (riconoscimento e riproduzione) ma non di ruotare e trasformare immagini mentali (Rosser, Lane e Mazzeo, 1988). I bambini in età prescolare giudicano, infatti, diverse delle figure congruenti, ma ruotate nello spazio (Rosser, 1994).

Le ricerche in ambito evolutivo sottolineano l'importanza di coinvolgere attivamente i bambini non solo a livello percettivo e motorio, ma anche nel creare e trasformare immagini mentali: la possibilità, a 5 anni, di eseguire dei movimenti diretti verso degli oggetti posizionati in una stanza conduce a un migliore ricordo della posizione di tali oggetti (Poag, Cohen e Weatherford, 1983). Fornire istruzioni su aspetti spaziali attraverso un approccio metacognitivo aumenta la capacità di bambini di 4 e 6 anni di leggere e apprendere mappe più facilmente.

Alcuni risultati provenienti da studi sulle differenze individuali (Hannafin, 2004; Hannafin, Vermillion, Truxau e Liu, 2008) mostrano il ruolo cruciale delle abilità visuospaziali nell'apprendimento della geometria: ragazzi con alte abilità visuospaziali ottengono migliori prestazioni, rispetto a quelli con basse abilità visuospaziali, in un programma computerizzato utilizzato per l'apprendimento della geometria.

Riassumendo i pochi studi presenti in letteratura, possiamo sintetizzare affermando che è fondamentale fornire un'educazione relativa alle abilità visuospaziali, quindi coinvolgere i bambini in situazioni di apprendimento in modo attivo; tuttavia, è importante anche analizzare le differenze individuali, dato che possedere delle buone abilità visuospaziali sembra poter predire il successo ottenuto in prove di geometria.

Allo stato attuale della ricerca, purtroppo, non esistono studi che abbiano indagato il rapporto tra MLVS e geometria, eppure si può ipotizzare che la memoria visiva, spaziale-simultanea e spaziale-sequenziale siano maggiormente coinvolte nel riconoscimento delle figure, anche in posizioni non convenzionali, e nel confronto tra figure, mentre la memoria visuospaziale attiva, che consente non solo di recuperare, ma anche di manipolare ed elaborare informazioni visive e spaziali, sia coinvolta in compiti di rotazione e traslazione di figure.

Resta, inoltre, da indagare ulteriormente il ruolo delle differenze individuali: individui con alta/bassa MLVS ottengono prestazioni diverse nelle prove di geometria? Le abilità visuospaziali sono coinvolte solo nel riconoscimento e nella trasformazione di figure geometriche o anche nella capacità di risolvere i problemi geometrici? È possibile stabilire una relazione tra misconcezioni in geometria e abilità visuospaziali, ovvero, è possibile che individui con basse abilità visuospaziali incorrano più spesso in misconcezioni in questo ambito?

Questi sono solo alcuni dei quesiti che le future ricerche dovranno cercare di risolvere.

Bibliografia

Arrigo G. e Sbaragli S. (2004), *I solidi: Riscopriamo la geometria,* Roma, Carocci.

Baddeley A.D. (1986), *Working memory,* Oxford, Oxford University Press.

Baddeley A.D. e Logie R.H. (1999), *Working memory: The multiple-component model.* In A. Miyake e P. Shah (a cura di), *Models of working memory,* Cambridge, Cambridge University Press, pp. 28-61.

Carlson-Radvansky L.A. e Irwin D. (1994), *Reference frame activation during spatial term assignment,* «Journal of Memory and Language», vol. 33, pp. 646-671.

Clements D.H. e Battista M.T. (1992), *Geometry and spatial reasoning.* In D.A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* New York, Information Age Pub., pp. 420-464.

Cornoldi C. e Vecchi T. (2003), *Visuospatial working memory and individual differences,* Hove, UK, Psychology Press.

Cornoldi C., De Beni R., Giusberti F. e Massironi M. (1998), *Memory and imagery: A visual trace is not a mental image.* In M.A. Conway, S.E. Gathercole e C. Cornoldi (a cura di), *Theories of memory. Vol. 2,* Hove, UK, Psychology Press, pp. 87-110.

Cornoldi C., De Beni R. e Mammarella I.C. (2008), *Mental imagery.* In E. Roediger III (a cura di), *Learning and memory: A comprehensive reference. Vol. 2: Cognitive psychology of memory* (J. Byrne editor), Oxford, Elsevier, pp. 103-124.

Cottino L., Foresti I., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sangiorgi M.C., Sbaragli S. e Zola L. (2011), *Geometria,* Bologna, Pitagora.

Cottino L. e Sbaragli S. (2004), *Le diverse «facce» del cubo,* Roma, Carocci.

Crowley M.L. (1987), *The van Hiele model of the development of geometric thought.* In *Learning and teaching geometry, K-12. 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* Reston, VA, Mary Montgomery Lindquist, pp. 1-16.

D'Amore B. (1987), *Geometria – Progetto Ma.S.E. Vol. V,* Milano, FrancoAngeli.

D'Amore B. (1993), *Esporre la matematica appresa: Un problema didattico e linguistico,* «La Matematica e la sua Didattica», vol. 3, pp. 289-301.

D'Amore B. e Fandiño Pinilla M.I. (2009), *La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale,* «La Matematica e la sua Didattica», vol. 23, pp. 261-298.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I. e Sbaragli S. (2008), *Difficoltà nell'apprendimento della matematica: Il punto di vista della didattica,* Trento, Erickson.

Dehaene S., Izard V., Pica P. e Spelke E. (2006), *Core knowledge of geometry in an Amazonian indigen group,* «Science», vol. 311, pp. 381-384.

Enriques F. (1906), *Problemi della scienza,* Bologna, Zanichelli.

Fandiño Pinilla M.I. (2002), *Curricolo e valutazione,* Bologna, Pitagora.

Fischbein E. (1993), *The theory of figural concepts,* «Educational Studies in Mathematics», vol. 24, pp. 139-162.

Hannafin R.D. (2004), *Achievement differences in structured versus unstructured instructional geometry programs,* «Educational Technology Research & Development», vol. 52, pp. 19-32.

Hannafin R.D., Vermillion J.R., Truxau M.P. e Liu Y. (2008), *Effects of spatial ability and instructional program on geometry achievement,* «The Journal of Educational Research», vol. 101, pp. 148-156.

Hermer L. e Spelke E. (1996), *Modularity and development: The case of spatial reorientation,* «Cognition», vol. 61, pp. 195-232.

Káldy Z. e Leslie A.M. (2002), *Competition for working memory resources in 9-month-olds infants,* International Conference on Infant Studies (ICIS), April, Toronto, Canada.

Kavšek M.J. (1999), *Infants' responsiveness to line junctions in curved objects,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 72, pp. 177-192.

Kosslyn S.M. (1980), *Image and mind,* Cambridge, MA, Harvard University Press.

Kosslyn S.M. (1994), *Image and brain,* Cambridge, MA, MIT Press.

Learmonth A.E., Newcombe N.S. e Huttenlocher J. (2001), *Toddlers' use of metric information and landmarks to reorient,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 80, pp. 225-244.

Linn M.C. e Peterson A.C. (1985), *Gender differences in verbal ability: A meta-analysis,* «Psychological Bulletin», vol. 104, pp. 53-69.

Logie R.H. (1995), *Visuo-spatial working memory*, Hove, UK, Lawrence Erlbaum Associates.

Lourenco S.F. e Huttenlocher J. (2008), *The representation of geometric cues in infancy,* «Infancy», vol. 13, pp. 103-127.

Maier H. (1993), *Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica,* «La Matematica e la sua Didattica», vol. 1, pp. 69-80.

Maier H. (1998), *L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria,* «La Matematica e la sua Didattica», vol. 3, pp. 271-290.

Mammarella I.C. (2008), *La memoria di lavoro visuospaziale: Una rassegna di studi recenti,* «Giornale Italiano di Psicologia», vol. 35, pp. 507-538.

Mammarella I.C., Pazzaglia F. e Cornoldi C. (2008), *Evidence for different components in children's visuospatial working memory,* «British Journal of Developmental Psychology», vol. 26, pp. 337-355.

McGee M.G. (1979), *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences,* «Psychological Bulletin», vol. 86, pp. 889-918.

Needham A. (2001), *Object recognition and object segregation in 4.5-month-old infants,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 78, pp. 3-22.

Newcombe N., Huttenlocher J. e Learmonth A. (1999), *Infants' coding of location in continuous space,* «Infant Behavior and Development», vol. 22, pp. 483-510.

Pazzaglia F. e Cornoldi C. (1999), *The role of distinct components of visuo-spatial working memory in the processing of texts,* «Memory», vol. 7, pp. 19-41.

Peano G. (1894), *Sui fondamenti della geometria,* «Rivista di Matematica», vol. IV, pp. 51-90 (su *Opere Scelte,* Roma, 1959, III).

Piaget J. e Inhelder B. (1979), *La rappresentazione dello spazio nel bambino*, Firenze, Giunti Barbera.

Poag C.K., Cohen R. e Weatherford D.L. (1983), *Spatial representations of young children: The role of self- versus adult-directed movement and viewing,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 35, pp. 172-179.

Poincaré H. (1902), *La science et l'hipothèse,* Paris, Flammarion.

Resnick L.B. e Ford W.W. (1981), *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico,* Torino, Sei.

Rosser R.A. (1994), *Children's solution strategies and mental rotation problems: The differential salience of stimulus components,* «Child Study Journal», vol. 24, pp. 153-168.

Rosser R.A., Lane S. e Mazzeo J. (1988), *Order of acquisition of related geometric competencies in young children,* «Child Study Journal», vol. 18, pp. 75-90.

Slater A., Morison V., Somers M., Mattock A., Brown E. e Taylor D. (1990), *Newborn and older infants' perception of partly occluded objects,* «Infant Behavior and Development», vol. 13, pp. 33-49.

Smith E.E. e Jonides J. (1999), *Storage and executive processes in the frontal lobes,* «Science», vol. 283, pp. 1657-1661.

Speranza F. (1987), *La geometria dalle cose alla logica.* In B. D'Amore (a cura di), *La matematica e la sua didattica,* Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme, Armando, Roma, p. 106.

Tversky B. (1991), *Cross-cultural and developmental trends in graphic productions,* «Cognitive Psychology», vol. 23, pp. 515-557.

Ungerleider L.G. e Mishkin M. (1982), *Two cortical visual systems.* In D.J. Ingle, M.S. Goodale e R.J.W. Mansfield (a cura di), *The analysis of visual behaviour,* Cambridge, MA, MIT Press, pp. 549-586.

Van Essen D.C., Anderson C.H. e Felleman D.J. (1992), *Information processing in the primate visual system: An integrated systems perspective,* «Science», vol. 255, pp. 419-423.

van Hiele P.M. (1986), *Structure and insight: A theory of mathematics education,* Orlando, Academic Press.

Wilcox T. e Schweinle A. (2002), *Object individuation and event mapping: Developmental changes in infants' use of featural information,* «Developmental Science», vol. 5, pp. 132-150.

Wynn K. (1992), *Addition and subtraction by human infants,* «Nature», vol. 358, pp. 749-750.

Xu F. e Carey S. (1996), *Infants' metaphysics: The case of numerical identity,* «Cognitive Psychology», vol. 30, pp. 111-153.